Gewone differentiaalvergelijkingen
Cursus 1999-2000.
Tweede herhalingstentamen 14 augustus 2000, duur: 3 uur.

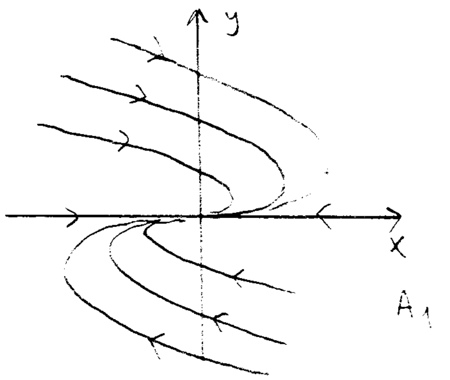
1.[1] (a)[3] Toon aan dat de differentiaalvergelijking $ydx+2xdy=0$ een integrerende factor heeft van de vorm $\varphi(x,y)=f(x)$ en bepaal vervolgens de oplossingen van deze vergelijking.
(b)[3] Bepaal van Bernoulli differentiaalvergelijking $y'=-2\frac{y}{x}+xy^2$ de oplossing die voldoet aan $y(1)=1$. (Aanwijzing: Vermenigvuldig met y^{-2}, stel voor $z=\frac{1}{y}$ de lineaire differentiaalvergelijking op en los die op eventueel via de methode van variatie van de constante.)
(c)[3] Bewijs dat de functie $y\to\cos xy$ Lipschitz-continu op $|x|\leq a$, $y\in\mathbb{R}$ is en bepaal een bijbehorende Lipschitz constante.

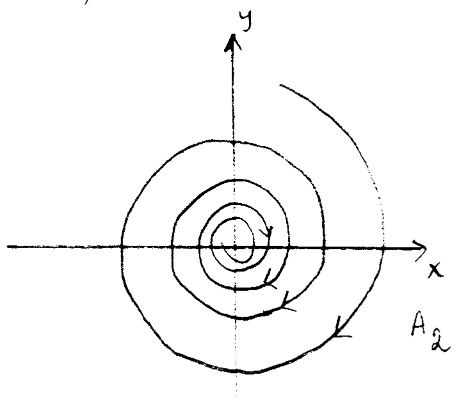
2.[1] (a)[3] Beschrijf de iteratiemethode van Picard voor het beginwaardeprobleem $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. Noem redelijk algemene voorwaarden voor f waaronder de methode een convergent proces oplevert. (Aanwijzing: Denk aan de stelling van Picard-Lindelöff op een strook.)
(b)[6] Pas de methode toe op het probleem:

$$y'=y+x,\quad y(0)=0.$$

(Aanwijzing: Bepaal eerst de oplossing van deze lineaire differentiaalvergelijking. Dan weet je waar het interatieproces naar convergeert.)

3.[1](a)[4] Hieronder staan de faseportretten van twee lineaire systemen van de vorm $y'=A_jy$ waarin A_j een constante inverteerbare 2×2 matrix is, $j=1,2$. Bespreek van elke A_j de eigenwaarden. Licht je antwoord toe. (Sleutelwoorden zijn: reëel en dan positief of negatief, niet reëel en dan het teken van het reële deel of zuiver imaginair, algebraische en meetkundige multipliciteit.)





(b)[5] Bepaal de fundamentele matrix $Y(t)$ met $Y(0)=$ de identiteit van het lineaire systeem $y'=Ay$ met

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Schets de baan van $y(t)=Y(t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ (een impressie is voldoende).

Z.O.Z.

4. [1] Beschouw de lineaire differentiaalvergelijking

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

met continue coëfficiënten en $p(x) \neq 0$ op een interval I. Stel y_1 en y_2 zijn lineair twee onafhankelijke oplossingen op I.
(a)[3] Bewijs dat de Wronski determinant $W(y_1, y_2)(x)$ nooit nul is op I.
(b)[3] Bewijs dat $W(y_1, y_2) \equiv$ constante op I dan en slechts dan als $q \equiv 0$ op I.
(c)[3] Bespreek de methode van de variatie van de constanten om de inhomogene vergelijking $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$ op te lossen en geef aan welke rol $W(y_1, y_2)(x)$ daarin speelt.

5.[1] Beschouw de lineaire differentaalvergelijking

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = f(x), \quad x \in [1, 2].$$

(a)[2] Bepaal een fundamenteel systeem van de homogene vergelijking bestaande uit functies van de vorm $y(x) = x^\lambda$.
(b)[3] Toon aan dat bij elke continue functie $f(x)$ op $[1, 2]$ er precies één oplossing y bestaat die voldoet aan

$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Welke stelling gebruik je daarbij?
(c)[4] Bepaal een integraalformule voor de in (b) genoemde oplossing. (Aanwijzing: Bereken de bijbehorende functie van Green.)